CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera teoretică: profil umanist
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a X-a

1. Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \log_3 2, \sqrt[6]{6}, \frac{1}{2}$.

b) Demonstrați că numărul $\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}-\sqrt{5} \in Z$.

Soluție:

$a_1 = \sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$

$a_2 = \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}$

$a_3 = \log_3 2$

$a_4 = \sqrt[6]{6}$

$a_5 = \frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3}$

$\log_3 \sqrt{3} < \log_3 2 < \log_3 3 = 1 < \sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$ de unde $a_5 < a_3 < a_4 < a_1 < a_2$.....4p

b).

$\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}-\sqrt{5} = \sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}-\sqrt{5} = \sqrt{3-\left|2\sqrt{5}-3\right|}-\sqrt{5} = \sqrt{3-2\sqrt{5}+3}-\sqrt{5} =$

$\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}-\sqrt{5} = \left|\sqrt{5}-1\right|-\sqrt{5} = \sqrt{5}-1-\sqrt{5} = -1 \in Z$.......................3 puncte

2. Rezolvați în R ecuațiile:

a) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$.

b) $\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+23-10\sqrt{x-2}} = 2$.

Soluție:

a) Observăm că $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x \cdot (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 1$. ....1 punct

Notam $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x = t > 0 \Rightarrow (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = \frac{1}{t}$.Înlocuim și obținem

$t+\frac{1}{t}=10 \Leftrightarrow t^2-10t+1=0$..1 p

cu $t_1, t_2=5\pm 2\sqrt{6}$ 1p

prin înlocuire obținem $x_1, x_2=\pm 2$...1 p

b) Ecuația este echivalentă cu $\sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2}-5)^2}=2 \Leftrightarrow$

$\left|\sqrt{x-2}-3\right|+\left|\sqrt{x-2}-5\right|=2 \Leftrightarrow$ ....1 p

$x\in[11;27]$ ....2 p

3. a) Calculaţi suma $\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+...+\log_2\frac{1023}{1024}$.

b) Se consideră numărul real $a=\log_3 2$. Exprimaţi numărul $x=\log_{18}3$ în funcţie de a.

Soluție:

1. a) $\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+...+\log_2\frac{1023}{1024}=$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{1023}{1024}\right)=\log_2\frac{1}{1024}$ ……………………………………….2p

$\log_2 2^{-10}=-10$ ……………………………………………………….……….2p

b) $x=\log_{18}3=\frac{1}{\log_3 18}$ ……………………………………………….…………..1p

$x=\frac{1}{\log_3\left(2\cdot 3^2\right)}$ ……………………………………………………………..1p

$x=\frac{1}{a+2}$ …………………………………………………………………....1p

4. Arătați că:

a) $\log_a b+\log_b a\geq 2, \forall a,b>0, a,b\neq 1 \log_a b+\log_b a\geq 2, (\forall) a,b\in(0,1)$ sau $a,b\in(1,+\infty)$

Soluție:

b) $\log_a\frac{3abc}{ab+ac+bc}+\log_b\frac{3abc}{ab+ac+bc}+\log_c\frac{3abc}{ab+ac+bc}\geq 3$, știind că $a,b,c\in(0,1)$.

a)Se aplică inegalitatea dintre media aritmetică și cea geometrică. 1p

$$\log_a b+\log_b a \geq 2\sqrt{\log_a b\cdot \log_b a}=2$$ 2p

b)Se aplică inegalitatea dintre media armonică și cea geometrică 1p

$$\frac{3abc}{ab+ac+bc}\leq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \begin{cases} \log_a \dfrac{3abc}{ab+ac+bc} \geq \log_a \sqrt[3]{abc} \\ \log_b \dfrac{3abc}{ab+ac+bc} \geq \log_b \sqrt[3]{abc} \\ \log_c \dfrac{3abc}{ab+ac+bc} \geq \log_c \sqrt[3]{abc} \end{cases}$$ 2p

Însumând relațiile și folosind punctul a) rezultă cerința. 1p